Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2026

FINAL – 13/03/2026

Apellido y Nombre:……………………………………………………………….……………………

Número de documento: ……………………………..…………………………………………

TEMA 1

1	2	3	4	5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto
- Todas las respuestas deben estar justificadas

EJERCICIO 1: Se sabe que el polinomio $p_{(x)} = x^4 + 3x^3 + (-2 - k^2)x^2 + (6 - k^2)x + 10$ es divisible por $c_{(x)} = (x - 2)$. Determinar si el polinomio $d_{(X)} = (x - x_0)$, donde x_0 es la menor raíz de $p_{(x)}$, es un divisor del polinomio $q_{(x)} = p_{(x)} + (2x + 10)$

EJERCICIO 2: Sean $f\colon [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ / $f_{(x)} = sen(x)$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $g_{(x)} = 3x^4 - 2$. Resolver la ecuación $(g \circ f)_{(x)} = f^2{}_{(x)}$.

EJERCICIO 3:

(a) Sea la función $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f_{(x)} = \sqrt{x^{log(\sqrt{x})}}$ determinar D_f y resolver la ecuación $f_{(x)} = 0$.

(b) Dar el conjunto solución de $16^{x^2-4} - 32^{2x-2} = 0$.

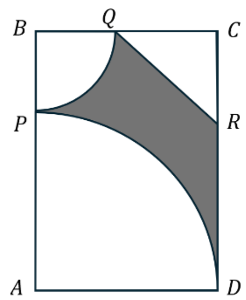
EJERCICIO 4:

(a) Dados los vectores $\vec{v} = \frac{1}{2}\breve{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\breve{\jmath}$ y $\vec{w} = \propto \breve{\imath} - \propto \breve{\jmath}$ determinar, si existen, los valores reales de $\propto$ de modo que: $(\vec{v} + \vec{w}) \perp (\vec{v} - \vec{w})$

(b) Se sabe que $\mathbb{L}_1$ es la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ y que la recta $\mathbb{L}_2$ pasa por los puntos de coordenadas $(1; -5)$ y $(4; 4)$. Calcular la medida del ángulo agudo comprendido entre $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$

EJERCICIO 5:

Se sabe que el área del rectángulo *ABCD* es igual a *160cm²* y el perímetro es de *52cm.* Con centro en *B* se trazó un arco de circunferencia de radio *BP* y con centro en *A* se trazó un arco de circunferencia de radio *AP*. Sabiendo que, además, $\overline{PB} = \overline{OR}$, calcular el valor exacto del área de la región sombreada.



(resuelto por Sylvina)

Seminario Universitario	Final — Tema 1	HOJA N° 1/2 FECHA 13-3-26

$\boxed{\text{EJ 1}}$ Se sabe que el polinomio $p(x) = x^4+3x^3+(-2-k^2)x^2+(6-k^2)x+10$ es divisible por $c(x) = (x-2)$

Determinar si el polinomio $d(x) = (x-x_0)$ donde x_0 es la menor raíz de $p(x)$, es un divisor del polinomio $q(x) = p(x)+(2x+10)$

$$p(2) = 0 = 2^4+3\times 2^3+(-2-k^2)\,2^2+(6-k^2)\,2+10$$

2 es raíz

$$0 = 50-8-4k^2+12-2k^2 \rightarrow -6k^2+54=0 \rightarrow \boxed{k^2=9}$$

$$\boxed{p(x) = x^4+3x^3-11x^2-3x+10}$$

$$q(x) = p(x)+2x+10 = \boxed{x^4+3x^3-11x^2-x+20 = q(x)}$$

	x^4	x^3	x^2	x	#
	1	3	-11	-3	10
2		2	10	-2	-10
	1	5	-1	-5	0 ✓
1		1	6	5	
	1	6	5	0 ✓	

$\rightarrow p(x) = (x-2)(x^3+5x^2-x-5)$

$x=1$ es raíz

$$p(x) = (x-2)(x-1)\underbrace{(x^2+6x+5)}_{(x+1)(x+5)}$$

raíces de $p = \{-5; -1; 1; 2\}$

↑ la menor

$$\boxed{d(x) = x+5}$$

quiero ver si $x=-5$ es raíz de $q(x)$

$$q(5) = 5^4+3\times 5^3-11\times 5^2-5+20 = 740 \neq 0$$

$$\boxed{d(x) \nmid q(x)}$$

(resuelto por Sylvina)

EJ 2) Sean $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}\ /\ f_{(x)}=\text{sen}(x)$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ g_{(x)}=3x^4-2$

Resolver la ecuación

$$(g\circ f)(x)=f^2_{(x)}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f_{(x)})=g(\text{sen}(x))=3\,\text{sen}^4(x)-2$$

$$f^2_{(x)}=\text{sen}^2(x)$$

$$3\,\text{sen}^4(x)-2=\text{sen}^2(x)$$

$$3\,\text{sen}^4(x)-\text{sen}^2(x)-2=0$$

$z=\text{sen}^2(x)$

$$3z^2-z-2=0$$

$$z=1=\text{sen}^2(x)$$

Absurdo: $\cancel{z=\underbrace{-\tfrac{2}{3}}_{<0}=\underbrace{\text{sen}^2(x)}_{\geq 0}}$

$\text{sen}(x)=1$ $\qquad\boxed{x=\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

$\text{sen}(x)=-1$ $\qquad\boxed{x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi}$

Solo $k=0$ (con $k\geq 1$ o $k\leq 1$ queda fuera de $[0,2\pi]$

$$\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right\}}$$

EJ 3) a) Sea la función $f:D_f\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ f_{(x)}=\sqrt{x^{\log(\sqrt{x})}}$.

Determinar D_f y resolver la ec. $f_{(x)}=10$

D_f: $\sqrt{x^{\log(\sqrt{x})}}\}\geq 0\to x\geq 0$ $\qquad\log(\sqrt{x})\to x>0$

$$\boxed{D_f=(0,+\infty)}$$

$$f_{(x)}=10=\sqrt{x^{\log(\sqrt{x})}}$$

$$100=x^{\log(\sqrt{x})}$$

$$\underbrace{\log(100)}_{10^2=100}=\log\left(x^{\log(\sqrt{x})}\right)$$

$$2=\log(\sqrt{x})\log(x)=\log(x^{1/2})\log(x)=\frac{1}{2}\log(x)\log(x)$$

$4=\log(x)\cdot\log(x)\to\log(x)=2\to\boxed{x=100}$

$\log(x)=-2\to\boxed{x=\frac{1}{100}}$

$$\boxed{S=\left\{\frac{1}{100};100\right\}}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

Seminario Universitario | Final | tema 1 | HOJA Nº 2/2 | FECHA 13-3-26

EJ 3 b) Dar el conjunto solución de $16^{x^2-4} - 32^{2x-2} = 0$

$$16^{x^2-4} = 32^{2x-2}$$

$$\frac{16^{x^2}}{16^4} = \frac{32^{2x}}{32^2}$$

$$\frac{16^4}{32^2} = 64$$

$$16^{x^2} = 32^{2x}\, 64$$

$$\left(2^4\right)^{x^2} = \left(2^5\right)^{2x} 2^6$$

$$2^{4x^2} = 2^{10x+6} \rightarrow 4x^2 = 10x+6$$

$$4x^2 - 10x - 6 = 0$$

$$x = 3 \qquad x = -1/2$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}}$$

EJ 4 a) Dados los vectores $\vec{v} = \frac{1}{2}\check{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\check{j}$ y $\vec{w} = \alpha\check{i} - \alpha\check{j}$ determinar, si $\exists$, los valores reales de α de modo que $(\vec{v}+\vec{w}) \perp (\vec{v}-\vec{w})$

$$\vec{v}+\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\alpha, -\alpha) = \left(\frac{1}{2}+\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}-\alpha\right) \quad \Big| \quad \vec{v}-\vec{w} = \left(\frac{1}{2}-\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}+\alpha\right)$$

$$a \perp b \text{ si } a.b = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}+\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}-\alpha\right)\left(\frac{1}{2}-\alpha; \frac{\sqrt{3}}{2}+\alpha\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\alpha\right) = \frac{1}{4} - \alpha^2 + \frac{3}{4} - \alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 = \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}_{1} \rightarrow \alpha^2 = 1/2 \rightarrow \boxed{S = \left\{-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right\}}$$

b) Se sabe que L_1 es la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ y que la recta L_2 pasa por los puntos de coord. $(1; -5)$ y $(4; 4)$. Calcular la medida del ángulo agudo comprendido entre L_1 y L_2

Lo pienso como vectores

$$L_2 : \vec{v} = (4,4) - (1,-5) \rightarrow \boxed{\vec{v} = (3, 9)}$$

$$L_1 : \vec{w} = (3,1) - (1,0) \rightarrow \boxed{\vec{w} = (2,1)}$$

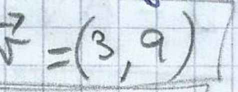
busco 2 puntos $x = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow A = (1,0)$

$x = 3 \rightarrow y = 1 \rightarrow B = (3,1)$

$$\cos(\alpha) = \frac{(3;9)(2;1)}{\sqrt{3^2+9^2}\,\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{15}{3\sqrt{10}\,\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\alpha = 45^\circ}$$



$\beta + \alpha = 180$

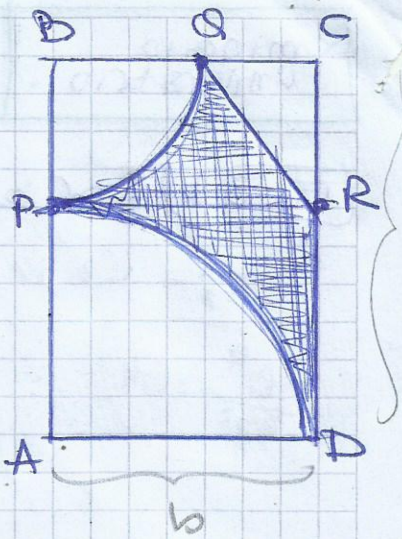
$\beta = 135°$

$$\boxed{\alpha = 45^\circ}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

EJ 5 Se sabe que el área del rectángulo ABCD es igual a $160\,cm^2$ y el perímetro es de 52cm. Con centro en B se trazó un arco de circunferencia de radio $\overline{BP}$ y con centro en A se trazó un arco de circunferencia de radio AP. Sabiendo que, además, $\overline{PB} = \overline{QR}$, calcular el valor exacto del área de la región sombreada



$$A_{\square} = b \cdot h = 160\,cm^2$$

$$P_{\square} = 2b + 2h = 52\,cm$$

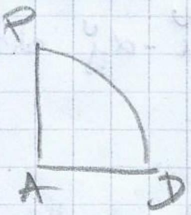
$$b + h = 26\,cm \rightarrow \boxed{b = 26\,cm - h}$$

$$b \cdot h = (26\,cm - h)\,h = 26\,h\,cm - h^2 = 160\,cm^2$$

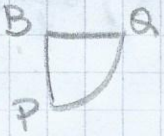
$$h^2 - 26h + 160 = 0 \longrightarrow h = 16\,cm \quad h = 10\,cm$$

$\boxed{b = 10\,cm}$ $\boxed{h = 16\,cm}$

$\overline{AD} = 10\,cm$ $\rightarrow \overline{AB} = 16\,cm = \overline{BP} + \underbrace{\overline{PA}}_{= AD = 10\,cm} \rightarrow \boxed{\overline{BP} = 6\,cm}$



$$= A_D = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \cdot (10\,cm)^2}{4} = \boxed{25\pi\,cm^2 = A_D}$$



$$\rightarrow A_{\square} = \frac{\pi \cdot r^2}{4} = \frac{\pi \cdot (6\,cm)^2}{4} = \boxed{9\pi\,cm^2 = A_{\square}}$$

$\overline{BQ} = \overline{BP} = 6\,cm$ $\quad \overline{BC} = 10\,cm = \underbrace{\overline{BQ}}_{6\,cm} + \overline{QC} \rightarrow \boxed{\overline{QC} = 4\,cm}$

$$A_{\triangledown} = \frac{4\,cm\;6\,cm}{2} = \boxed{12\,cm^2 = A_{\triangledown}}$$

$$A_S = A_{\square} - A_D - A_{\square} - A_{\triangledown} = 160\,cm^2 - 25\pi\,cm^2 - 9\pi\,cm^2 - 12\,cm^2$$

$$\boxed{A_S = 148\,cm^2 - 34\pi\,cm^2}$$

(resuelto por Sylvina)